

# ANALYSE DE FONDATIONS PAR LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS

O. SEKLAOUI

Post Graduante en Magister, IGC - Université de Tizi Ouzou

A. KHENNANE

Maître de Conférences, IGC - Université de Tizi Ouzou

## Résumé

*L'analyse par éléments finis des problèmes caractérisés par des domaines géométriques s'étendant à l'infini, tels les fondations reposant sur les massifs semi-infinis, est souvent imprécise, chère ou les deux à la fois. Parmi les méthodes qui permettent de pallier à ces inconvénients, les éléments infinis sont les plus adaptés, car, non seulement, ils reflètent la nature infinie du domaine, mais ils donnent aussi d'excellents résultats en terme de précision et d'économie de la solution. De plus, ils sont très faciles à mettre en œuvre dans un programme d'éléments finis.*

**Mots clés :** élément fini • maillage • domaine infini • fondations

imposées d'une manière fictive sur ces frontières. Par exemple, dans l'analyse des problèmes de contraintes et/ou d'infiltration, souvent un substratum indéformable et/ou imperméable est choisi à une profondeur située assez loin du point d'application des charges. Or, un facteur important dont dépendent la précision et l'économie des solutions des méthodes numériques est le choix du maillage. Si la frontière est située assez loin du point d'application des charges, ce qui permettra, a priori, d'économiser sur l'espace mémoire et le temps d'exécution, alors la solution ne sera qu'imprécise. Si, par contre, la frontière est située assez loin du point d'application des charges, ce qui nécessitera un très grand nombre d'éléments d'où un coût élevé, et parfois injustifié, de la solution. De plus, dans les deux cas, le problème du choix des conditions aux limites reste entier.

Néanmoins, il existe des méthodes qui permettent de pallier à ces insuffisances. La plus simple est celle proposée par Desai et Abel [1, 2], citée dans Amoros et al [3], qui consiste à choisir les dimensions du domaine à mailler en fonction du diamètre du cercle de chargement. Une autre méthode utilisée par Amoros et al. [3], consiste en la combinaison de la dernière avec des éléments frontières. Cependant, la méthode qui reflète réellement la nature infinie du domaine est sans doute celle qui consiste en l'emploi d'éléments infinis ([4, 5], [6], [7], [8], [9], [10], et [11]).

## 2 LES ELEMENTS INFINIS

### 2.1 Généralité

La caractéristique commune aux éléments infinis est que la quantité à intégrer sur l'élément, par exemple l'énergie potentielle dans le cas des structures, doit être finie. De ce fait, la fonction approchée construite sur l'élément pour approximer la quantité inconnue

## 1 INTRODUCTION

Bien qu'il n'y ait pas de domaines physiques qui s'étendent à l'infini, il y a des cas où c'est utile et même avantageux de supposer qu'il en existe. C'est le cas des sols ; le rayon de la terre, égal environ à 6400 km, est de loin supérieur aux dimensions des domaines utiles à l'ingénieur (quelques mètres pour l'ingénieur civil et quelques kilomètres pour l'ingénieur géophysicien). Par conséquent, toutes les fondations des ouvrages de génie civil peuvent être considérées comme reposant sur des massifs semi-infinis.

Dans la pratique quotidienne de l'ingénieur, cette infinité n'est pas toujours prise en compte et elle est souvent tronquée. Que l'analyse soit faite avec les méthodes des différences finies ou des éléments finis, le milieu semi-infini est transformé en un domaine fini avec des frontières et des conditions aux limites

doit tendre vers zéro quand les dimensions de l'élément tendent vers l'infini. De plus, elle doit engendrer des intégrations finies sur l'élément.

Les éléments infinis sont construits suivant deux approches : l'approche directe et l'approche inverse. L'approche directe est celle due à Bettess [4]. Elle consiste en l'extension du domaine géométrique d'un élément de référence en dehors des limites conventionnelles (jusqu'à l'infini) suivant l'une ou plusieurs directions tout en gardant les fonctions de forme classiques pour sa représentation paramétrique. Quant à l'approximation de la fonction inconnue sur l'élément, celle-ci doit décroître asymptotiquement à zéro à l'approche de l'infini. En d'autres termes, les fonctions de forme (d'interpolation nodale) associées à l'élément dans la (ou les) direction (s) infinie (s) doivent comporter un terme qui tend vers zéro vers l'infini. L'inconvénient de cette méthode c'est que l'une des bornes d'intégration sur l'élément n'est pas finie. On désigne aussi cette approche par le terme "formulation descendante". Par contre, dans l'approche inverse [8], les dimensions de l'élément de référence ainsi que les fonctions d'interpolation nodale de la fonction inconnue sont les mêmes que celle d'un élément fini classique sauf que la représentation paramétrique de l'élément est définie à l'aide de fonctions comportant une singularité au nœud situé sur la frontière, par exemple pour  $\zeta = +1$  si  $\zeta$  est la direction infinie, de façon que quand  $\zeta$  approche  $+1$  le nœud correspondant de l'élément parent se retrouve à l'infini. On désigne cette approche par le terme "formulation ascendante". Bien que cette méthode soit moins intuitive, son avantage réside dans le fait que les intégrations sur l'élément sont faites à l'aide des formules de Gauss-Legendre.

## 2.2 Formulation directe d'un élément infini à 9 nœuds

### 2.2.1 Fonctions de forme

Un élément infini à neuf nœuds se présente géométriquement comme suit, (Figure 1) :

Les nœuds d'interpolation 7, 8, et 9 suivant la direction infinie sont situés à l'infini. Les fonctions de forme suivant cette direction sont construites à partir des polynômes de Lagrange multipliés par un terme de décroissance en exponentielle.

Etant donné trois points dont deux possèdent des abscisses finies et le troisième situé à l'infini (Figure 2) :

Les fonctions de forme pour les deux premiers points sont définies comme suit [4] :

$$N_1 = e^{(x_1 - x)/L} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

et

$$N_2 = e^{(x_2 - x)/L} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$$

où  $L$  est une longueur arbitraire qui représente l'intensité de la décroissance de l'exponentielle.

Quant à la fonction de forme  $N_3(x)$ , elle est donnée par :

$$N_3(x) = 1 - (N_1(x) + N_2(x))$$

Les fonctions  $N_i(x)$ ,  $i = 1$  jusqu'à 3, vérifient la propriété des fonctions d'interpolation nodale :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

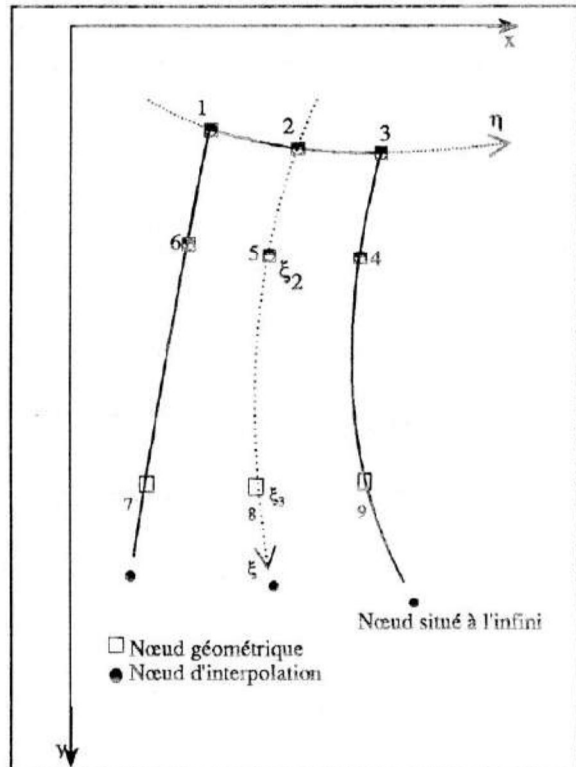


Figure 1 : Représentation géométrique d'un élément infini à neuf nœuds

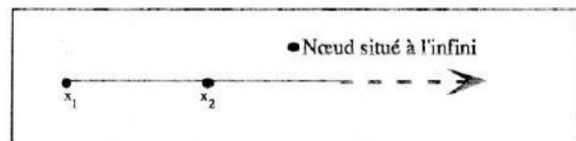


Figure 2 : Élément infini à une dimension.

Quant à l'élément infini à deux dimensions représenté sur la figure 1, ses fonctions de forme sont obtenues en combinant les fonctions de forme dans la direction  $\eta$  avec les fonctions de forme précédentes en effectuant le produit matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \\ N_3(\eta) \end{bmatrix} \langle N_1(\zeta), N_2(\zeta), N_3(\zeta) \rangle$$

qu'on réarrange ensuite sous forme d'un vecteur pour trouver :

$$\begin{bmatrix} N_1(\zeta, \eta) \\ N_2(\zeta, \eta) \\ N_3(\zeta, \eta) \\ N_4(\zeta, \eta) \\ N_5(\zeta, \eta) \\ N_6(\zeta, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5\eta(1-\eta)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)e^{-\zeta/L} \\ (1-\eta^2)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)e^{-\zeta/L} \\ 0.5\eta(1+\eta)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)e^{-\zeta/L} \\ 0.5\eta(1+\eta)\left(\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)e^{(\zeta_2-\zeta)/L} \\ (1-\eta^2)\left(\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)e^{(\zeta_2-\zeta)/L} \\ 0.5\eta(1-\eta)\left(\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)e^{(\zeta_2-\zeta)/L} \end{bmatrix}$$

#### Remarques

- Les fonctions de forme dans la direction  $\eta$ ,  $N_1(\eta)$ ,  $N_2(\eta)$ ,  $N_3(\eta)$  sont celles d'un élément quadratique à une dimension qu'on peut retrouver dans presque tous les ouvrages sur la méthode des éléments finis, entre autres Touzot et Dhatt [12] et Meek [13].
- Les fonctions de forme  $N_4(\zeta, \eta)$ ,  $N_5(\zeta, \eta)$  et  $N_6(\zeta, \eta)$  des nœuds situés à l'infini ne sont pas nécessaires car les valeurs nodales de la fonction inconnue à ces nœuds sont nulles. Par conséquent, pour un problème de déformations ou de contraintes planes, le champ de déplacement sur l'élément infini peut être approximé comme suit :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

De plus, nous pouvons aisément vérifier que  $u$  et  $v$  tendent vers zéro quand  $\zeta$  tend vers l'infini.

#### 2.2.2 Définition de la géométrie de l'élément

L'élément tel que défini par ses fonctions de forme n'est pas isoparamétrique. Les fonctions  $\langle N \rangle$  ne peuvent pas être substituées aux fonctions de transformation géométrique. Ce qui est, d'ailleurs, assez simple à vérifier. Si on écrit :

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_6 y_6$$

on s'aperçoit que  $y$  tend vers zéro quand  $\zeta$  tend vers l'infini.

Pour éviter que l'élément soit "télescopé" à zéro ou d'avoir affaire à des quantités infinies, ce qui est d'ailleurs impossible avec un ordinateur électronique, la géométrie de l'élément est définie en se basant sur des polynômes de Lagrange conventionnels. Les der-

niers nœuds, théoriquement situés à l'infini, sont ramenés à une distance finie mais relativement large par rapport aux autres coordonnées des nœuds tel que représenté sur la figure 1. Les fonctions de transformation géométrique ainsi construites sont données par :

$$\begin{bmatrix} \tau_1(\zeta, \eta) \\ \tau_2(\zeta, \eta) \\ \tau_3(\zeta, \eta) \\ \tau_4(\zeta, \eta) \\ \tau_5(\zeta, \eta) \\ \tau_6(\zeta, \eta) \\ \tau_7(\zeta, \eta) \\ \tau_8(\zeta, \eta) \\ \tau_9(\zeta, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5\eta(1-\eta)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)\left(\frac{\zeta_3-\zeta}{\zeta_3}\right) / \zeta_2\zeta_3 \\ (1-\eta^2)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)\left(\frac{\zeta_3-\zeta}{\zeta_3}\right) / \zeta_2\zeta_3 \\ 0.5\eta(1+\eta)\left(\frac{\zeta_2-\zeta}{\zeta_2}\right)\left(\frac{\zeta_3-\zeta}{\zeta_3}\right) / \zeta_2\zeta_3 \\ 0.5\eta(1+\eta)\zeta(\zeta_3-\zeta) / (\zeta_2(\zeta_3-\zeta_2)) \\ (1+\eta^2)\zeta(\zeta_3-\zeta) / (\zeta_2(\zeta_3-\zeta_2)) \\ -0.5\eta(1-\eta)\zeta(\zeta_3-\zeta) / (\zeta_2(\zeta_3-\zeta_2)) \\ -0.5\eta(1-\eta)\zeta(\zeta_2-\zeta) / (\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3)) \\ (1-\eta^2)\zeta(\zeta_2-\zeta) / (\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3)) \\ 0.5\eta(1+\eta)\zeta(\zeta_2-\zeta) / (\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3)) \end{bmatrix}$$

#### 2.2.3 Intégration numérique

La mise en œuvre de l'élément dans un programme de calcul se fait de la même manière que pour les éléments finis classiques sauf que la matrice de rigidité doit être intégrée de 0 à  $+\infty$  suivant  $\zeta$  :

$$[K]^e = \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] D \text{ et } [J] d\eta d\zeta$$

Comme toutes les fonctions apparaissant dans l'équation contiennent le terme  $\text{EXP}(-\zeta)$ , l'intégration suivant  $\zeta$  est évaluée à l'aide des tables des abscisses et poids d'intégration pour les fonctions de type :

$$\int_0^{\infty} \text{EXP}(-x) F(x) dx$$

données dans Rabinowitz et Weiss [14]. Quant à l'intégration suivant  $\eta$ , elle est évaluée à l'aide de la méthode de Gauss-Legendre.

### 3 EXEMPLES ET DISCUSSIONS

#### 3.1 Programme de calcul SOLINF

L'élément infini décrit précédemment est utilisé dans un programme en Fortran pour analyser deux types de fondation (circulaire et semelle filante) reposant sur des massifs semi-infinis.

Les programmes par éléments finis originaux sont ceux [15] qui utilisent un élément isoparamétrique à huit nœuds. A ces programmes sont venus se greffer toutes les sous-routines relatives à l'élément infini ainsi

qu'une subroutine de génération de maillage. Ces nouveaux programmes sont ensuite fusionnés pour former le programme SOLINF. Ce programme permet l'analyse des problèmes de déformations planes et axisymétriques. De plus, il contient une structure de décision qui permet d'inclure ou non les éléments infinis.

### 3.2 Fondation circulaire

L'exemple suivant, dont les caractéristiques géométriques et de chargement sont représentées sur la figure 3, a déjà fait l'objet d'une analyse par éléments finis couplés à des éléments frontières [3]. De plus, il présente une solution analytique obtenue à l'aide du programme AILIZE III du Laboratoire des Ponts et Chaussées [3]. Il a été choisi dans le but d'avoir des éléments de comparaison pour les résultats du programme SOLINF.

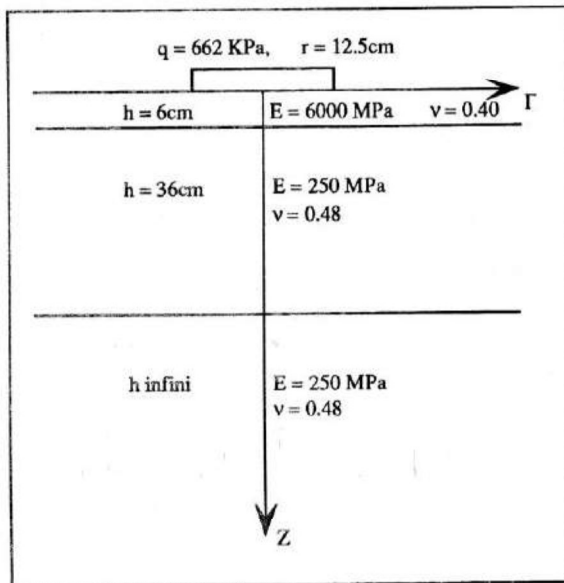


Figure 3 : Structure et chargement de la chaussée.

L'exemple représente la structure d'une chaussée qui est assimilée à un massif multicouche, semi-infini, élastique, linéaire, homogène et isotrope. Le chargement représente la roue d'un véhicule assimilée elle aussi à une plaque circulaire. Le domaine présente une symétrie de révolution et il est maillé de deux manières différentes. Le premier maillage, représenté sur la figure 4-a, est fait à l'aide d'éléments finis, et le deuxième, représenté sur la figure 4-b, à base d'éléments finis associés à des éléments infinis.

Il est à remarquer que le maillage de la figure 4-a contient beaucoup plus d'éléments (180) que celui de la figure 4-b (80).

A l'aide du programme SOLINF, nous avons obtenu deux solutions au problème : l'une par éléments finis classiques et l'autre avec les éléments infinis.

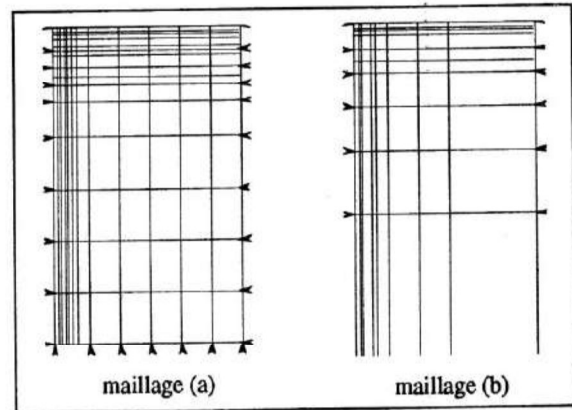


Figure 4 : Détails des maillages

Ces solutions représentent les déplacements verticaux dans l'axe de la charge et sont rapportées sur la figure 5 au même temps que la solution analytique rapportée dans [3].

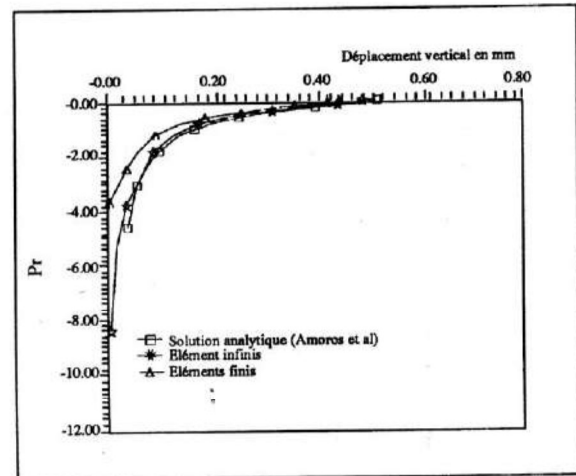


Figure 5 : Comparaison des solutions pour l'état axisymétriques

Nous pouvons voir sur la figure 5 que la solution par éléments infinis, obtenue avec  $L = 2$ ,  $\zeta_2 = 2$ ,  $\zeta_3 = 80$ , est beaucoup plus proche de la solution analytique que ne l'est la solution par éléments finis qui, naturellement, prévoit un déplacement nul à l'endroit de la frontière. De plus, la solution par éléments infinis a nécessité beaucoup moins d'éléments donc beaucoup plus économique que la solution par éléments finis.

### 3.3 Etat plan de déformation

L'exemple suivant représente une semelle filante reposant sur un massif semi-infini. Les caractéristiques géométriques et de chargement sont représentées sur la figure 6.

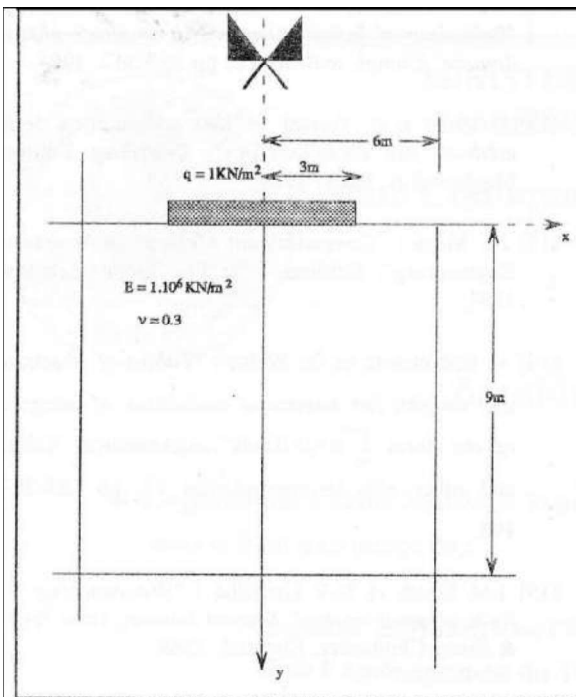


Figure 6 : Structure de la semelle filante

En raison de la symétrie du domaine par rapport à l'axe  $y$ , nous avons seulement mailler la moitié de deux façons différentes. La figure 7-a représente les détails du maillage par éléments finis classiques et la figure 7-b le maillage par éléments finis associés à des éléments infinis.

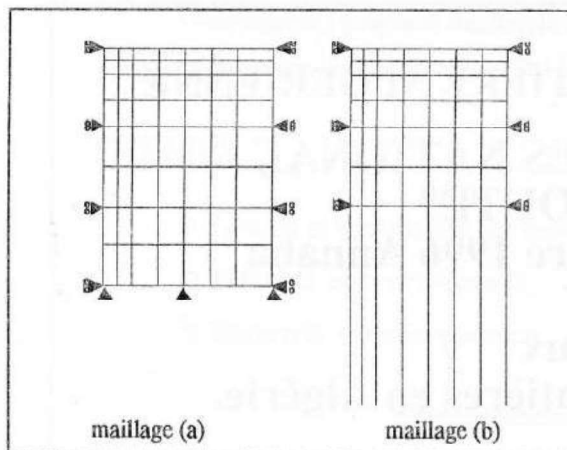


Figure 7 : Détails des maillages

Il est à remarquer, aussi, que le nombre d'éléments est supérieur dans le maillage de la figure 7-a (56 éléments) par rapport à celui du maillage de la figure 7-b (42 éléments).

La figure 8 représente les solutions par éléments finis et par éléments infinis ( $L = 2$ ,  $\zeta_2 = 3$ ,  $\zeta_3 = 150$ )

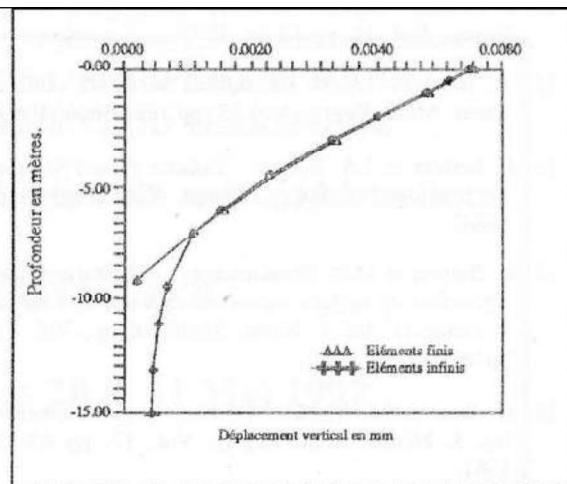


Figure 8 : Comparaison des solutions pour l'état plan de déformation.

obtenues avec le programme SOLINF. Les courbes désignent les déplacements verticaux des points situés dans l'axe de la semelle. Dans ce cas de figure nous ne disposons pas de solution analytique à laquelle nous pouvons comparer les résultats, mais il apparaît clairement que la solution par éléments infinis est beaucoup plus précise que celle par éléments finis, qui naturellement, prévoit un déplacement nul à l'endroit de la frontière. Comme sur la figure 5, la solution par éléments infinis possède une forme d'exponentielle et tend vers zéro suivant la profondeur. De plus, la solution par éléments infinis est plus économique.

## 5 CONCLUSION

La méthode des éléments finis combinés à des éléments infinis a été utilisée pour analyser deux types de fondations reposant sur des massifs semi-infinis. Les résultats obtenus avec cette méthode se sont avérés être très intéressants du moment qu'ils sont non seulement plus précis mais beaucoup plus économiques que ceux obtenus avec les éléments finis classiques. De plus, les éléments infinis ne posent pas de difficulté majeure quant à leur programmation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.S Desai et J.F Abel : "Introduction to the finite element method" Van Nostrand Company Reinhold Company, New York, 1972.
- [2] C.S Desai : "Theory and application of the finite element method in geotechnical engineering" Proceedings of symposium on the application of finite element method in Engineering, Vicksburgh, Mississippi, 1972.
- [3] D. Amoros, J. Martinez et C. Surry "Un exemple de calcul de chaussée par la méthode des éléments finis" Bull. Liaison Labo. P. et Ch., pp 61-67, Nov-Déc 1980.

- [4] P. Bettess : "*Infinite elements*" Int. J. Numr. Meth. Engrg., Vol. 11, pp 53-64, 1977.
- [5] P. Bettess "*More on infinite elements*" Int. J. Numr. Meth. Engrg., Vol 15, pp.1631-1626, 1980.
- [6] P. Bettess et J.A. Bettess "*Infinite elemnt for static problems*" J. Engrg. Compt. Vol. 1, pp 4-16, 1984.
- [7] P. Bettess et O.C. Zienkiewicz : "*Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements*" Int. J. Numr. Meth. Engrg., Vol. 11, pp1271 -1290, 1977.
- [8] G. Beer et J.L. Meek : "*Infinite domain elements*" Int. J. Numr. Meth. Engrg., Vol. 17, pp 43-52, 1981.
- [9] A. Curnier : "*A static infinite element*" Int. J. Numr. Engrg., Vol. 19, pp 1479-1488, 1977.
- [10] P. Kumar : "*Static infinite element formulation*" J. Struct Engrg., ASCE, Vol. 111, N° 11, pp 1355-1385, 1985.
- [11] M.N. Viladkar, J. Noorzaei et P.N. Godbole : "*Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain*" Compt. and Struct., pp 337-342, 1994.
- [12] G. Dhatt et G. Touzot : "*Une présentation de la méthode des éléments finis*". Deuxième Edition, Maoline S.A, Paris, 1984.
- [13] J.L. Meek : "*Computational Methods in Structural Engineering*". Editions F & FN Spoon, Londres, 1991.
- [14] P. Rabinowitz et G. Weiss : "*Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n f(x) dx$* ". mathematical Tables and other aids to computation 13, pp 285-294, 195.
- [15] I.M. Smith et D.V. Griffiths : "*Programming the finite element method*" Second Edition, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1988.

## DANS LE PROCHAIN NUMERO :

### ❑ ASSOCIATION ROUTIERE ALGERIENNE

### "2EME CONGRES NATIONAL DE LA ROUTE"

8, 9 et 10 Décembre 1996 Annaba

- Synthèse des travaux
- Infrastructures routières en Algérie.

### ❑ Réunion des Anciens Elèves de l'Ecole Nationale des Travaux Publics (AETPA)